Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Juillet-Durée:2h00
Final
2013-2014

Sujet proposé par: J.Saab
pour le centre d'enseignement de:
Beyrouth
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Programmable

Examen Final
Analyse numérique matricielle - CSC104

1. Soit $||.||_2$ la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$
   (a) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors $||A||_2^2 = \rho(A^*A)$ où A^* est l'adjoint de A
   (b) Déduire que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors $\rho(A) = ||A||_2$ et que $cond(A) = \dfrac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$ où
   $$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n| \qquad (1)$$
   avec λ_i est une valeur propre de A pour tout i
   (c) Soit le système (S) : $Ax = b$ avec A une matrice S.D.P.et les λ_i vérifient (1)
      1. Montrer que l'algorithme du gradient à pas constant α pour la résolution de (S) converge si et seulement si $0 < \alpha < \dfrac{2}{\lambda_n}$
      2. En déduire que s'il existe $M > 0$ tel que $||Ax||_2 \leq M||x||_2$ alors l'algorithme du gradient à pas constant converge si $\alpha \in]0, \frac{2}{M}[$
      3. Déterminer la valeur optimale α^* de α qui assure la convergence la plus rapide de cet algorithme

---

2. Soit A une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. Soit $B = I - M^{-1}A$ la matrice de l'itération:
   $$x_{n+1} = Bx_n + c$$
   Supposons que $M + M^* - A$ soit définie positive
   (a) Soit x un vecteur quelconque et on pose $y = Bx$. Montrer l'identité
   $$< x, Ax > - < y, Ay > = < (x-y), (M + M^* - A)(x-y) > .$$
   (b) Supposons que A est définie positive. Soit x un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ. $y = Bx = \lambda x$. Utiliser l'identité précédente pour montrer que $|\lambda| < 1$. Que peut-on conclure sur la convergence de la méthode?
   (c) Supposons maintenant que $\rho(B) < 1$. Montrer que A est définie positive
   (d) Supposons A décomposée par points ou par blocs sous la forme
   $$A = D - E - F$$
   avec D définie positive.
   Montrer que la méthode de relaxation par points ou par blocs pour $0 < \omega < 2$ converge si et seulement si A est définie positive.

---

3. On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer la matrice A_1 semblable à A et qui a la forme d'une matrice de Hessenberg.

   (b) Déterminer la matrice A_2 semblable à A_1 donnée par la première itération de la méthode QR

   (c) Expliquer comment obtenir les valeurs propres de A grâce à cette méthode

---

Annexe:

- Dans la méthode de relaxation $M = \frac{1}{\omega}D - E$
- Matrie de Hessenbeg::

$$u_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^k_{k+1,k} \pm \sqrt{\sum\limits_{i=k+1}^{n} (a^k_{i,k})^2} \\ a^k_{k+2,k} \\ \vdots \\ a^k_{n,k} \end{pmatrix}$$

$A_1 = A$ et $A_{k+1} = H_k A_k H_k$ où $H_k = H(u_k) = I - \dfrac{2}{u_k^* u_k}.u_k.^* u_u$ est la matrice de Houesholder associée à u_k.